

GCN (GdL ARIA) - Adrien Guille (ERIC) - 15-01-21

CNN
usuel

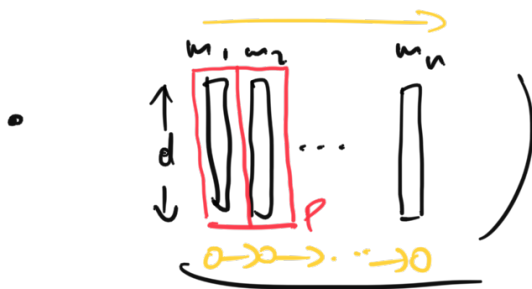
convolution définie dans le domaine spatial

- Entrée: séquence d'ids de mots
 $S = (i_1, i_2, \dots, i_n)$

- Embedding: séquence d'embeddings:

$$(X \in \mathbb{R}^{d \times n})$$

↑
dimension of embedding



- Convolution 1D

- largeur / support : l

- poids $\underline{P} \in \mathbb{R}^{d \times l}$: coefficients ligne

$$\underline{(X \otimes P)} \in \mathbb{R}^{n-l+1}$$

$$(X \otimes P)_i = \sum (P \odot X_{i:i+l}) = \sum_{j=0}^{l-1} P_{j+1} \cdot X_{i+j}$$

↑
produit
terme à terme

- Sous-échantillonnage: Max Pooling

• Conche sortie : ad-hoc

⋮

* Def de la convolution dans le domaine de Fourier

• $f \in \mathbb{R}^n$: signal

• $g \in \mathbb{R}^n$: filtre support n

$$(f \otimes g)_1 = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} \cdot f \quad \underline{(f \otimes g)_2} = \begin{pmatrix} g_n \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{n-1} \end{pmatrix} \cdot$$

$$(f \otimes g) = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \dots & g_n \\ g_n & g_1 & \dots & g_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_2 & g_3 & \dots & g_1 \end{pmatrix} f$$

C : matrice circulante
↙ diagonale à l'h. ...

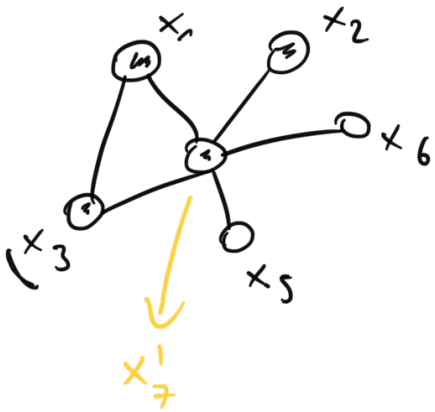
U : base de Fourier
vecteurs prop.
de C

$$(f \otimes g) = \underline{U \text{diag}(g) U^T} f$$

$$= \underline{U} (\underline{U^T f} \odot \underline{U^T g})$$

$$\mathcal{F}\mathcal{F} \left(\mathcal{F}(f) \quad \mathcal{F}(g) \right)$$

Corpus de documents liés:



- $G = (V, E)$ graphe simpl

↑ sommets
↑ arêtes
 $|V| = n$

symétrique → - $A \in \{0,1\}^{n \times n}$ matrice d'adjacence

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- $D \in \mathbb{N}^{n \times n}$ matrice diagonale des degrés

$$d_{ij} = \begin{cases} \text{degré}(i) & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- matrice Laplacienne

$$L \triangleq D - A$$

$$l_{ij} = \begin{cases} \text{degré}(i) & \text{si } i=j \\ -1 & \text{si } (i,j) \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

↳ normalisée $L_{\text{norm}} = I_n - D^{-\frac{1}{2}} A D^{-\frac{1}{2}}$

$$L = Q \Lambda Q^T$$

↳ $\forall \lambda_i \in [0, 2]$

- modes de Fourier de G

- "fréquences" de Fourier de G

Par analogie:

- signal sur les sommets de G : $f: V \rightarrow \mathbb{R}$
 $f \in \mathbb{R}^n$

$$(f \otimes g_0) = Q (Q^T f \otimes Q^T g_0)$$

$$= \boxed{Q \text{diag}(g_0) Q^T f}$$

• 1ère approche: $g_0 = \theta \in \mathbb{R}^n$
 coefficients libres

• 2ème approche: filtre paramétrique:
 polynômial

$$\underline{g_0} = \hat{g}_0(\tilde{r}) = \sum_{k=0}^{K-1} \theta_k \tilde{r}^k$$

$\theta \in \mathbb{R}^K$

$$\underline{(f \otimes g_0)} = \underbrace{Q \text{diag}(\hat{g}_0(\tilde{r})) Q^T}_{\hat{g}_0(\tilde{r})} f$$

$$= \underline{\hat{g}_0(\tilde{r})} f$$

$$\left(Q \tilde{r} Q^T \right)^k$$

$$= \underbrace{Q \tilde{r}^k Q^T}_c$$

② si $+cc(i,j) >$
 $L_{ij}^k = 0$

• 3ème approche: approcher \hat{g}_0
 par des polynômes de Tchebychev

$$\hat{g}_0(\tilde{r}) \approx \sum_{k=0}^{K-1} \theta'_k T_k(\tilde{r})$$

$$\tilde{\lambda} = \frac{2}{\lambda_{\max}} (\lambda - I_n)$$

$$T_0(x) = 1 \quad \underline{T_1(x) = x}$$

Kift : GCN $K=2$
 $\lambda_{\max} \approx 2$

$$f \otimes_{\mathbb{G}} g_0 = \theta_0' f + \theta_1' \tilde{L} f$$

$$\uparrow$$

$$\frac{2}{\lambda_{\max}} L (-I_n)$$

$$= \underbrace{\theta_0'}_{\theta} f + \theta_1' (D^{-\frac{1}{2}} A D^{-\frac{1}{2}}) f$$

$$\theta_0' = \theta_1' = -\theta_1'$$

$$= \theta (I_n + D^{-\frac{1}{2}} A D^{-\frac{1}{2}}) f$$

$X \in \mathbb{R}^{n \times d}$: embeddings des documents

$$Z = (D^{-\frac{1}{2}} A D^{-\frac{1}{2}} X \theta) \in \mathbb{R}^{d \times F} \leftarrow F \text{ filtres}$$

$\in \mathbb{R}^{n \times F}$

↳ diffusion à travers le voisinage direct

GCN: 2 couches
